Jaarlijks in januari vindt de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Van de 5612 deelnemers aan de eerste ronde van januari 2012 zijn er zes die zich gedurende anderhalf jaar door de vervolgrondes en selectietoetsen heen geslagen hebben en zich uiteindelijk geplaatst hebben voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) 2013. In juli reisden ze af naar Santa Marta, een stadje aan de Caribische kust van Colombia. De IMO-opgaven zijn echte krakers. In dit artikel bekijken we opgave 2.

■ door Birgit van Dalen

KLEUREN SCHEIDEN IN COLOMBIA

IMO-opgave 2 gaat over configuraties van 2013 rode en 2014 blauwe punten in het vlak. De bedoeling is om deze punten met zo min mogelijk rechte lijnen van elkaar te scheiden: rode en blauwe punten mogen niet samen in één gebied terechtkomen dat ontstaat door het trekken van de scheidingslijnen. Er mogen wel meerdere rode punten in één gebied zitten of juist meerdere blauwe.

Als alle 4027 punten op een rijtje zouden liggen, afwisselend rood en blauw, zouden we 4026 lijnen nodig hebben. Maar dit soort configuraties sluiten we uit: de punten moeten zó in het vlak liggen, dat als je een lijn trekt door twee van de punten, daar nooit een derde punt op ligt. Met deze voorwaarde erbij is nu de vraag wat het kleinste aantal scheidingslijnen is waarmee je de rode en blauwe punten kunt scheiden, hoe de 4027 punten in het vlak ook liggen.

EENVOUDIGE GEVALLEN

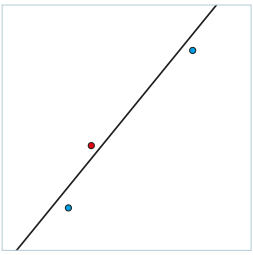
Omdat 4027 punten nogal veel is en het lastig is om daarbij een vermoeden van een goed antwoord te krijgen, kijken we eerst eens wat er gebeurt als we slechts drie punten zouden hebben: een rood punt en twee blauwe. Het is duidelijk dat we minstens één scheidingslijn nodig hebben. Kunnen we met één scheidingslijn de twee blauwe punten scheiden van het rode? Ja, dat lukt wel. Zelfs als het rode punt heel dicht bij de denkbeeldige lijn door de twee blauwe punten ligt, kunnen we er nog net wel een lijn precies tussendoor tekenen, zie figuur 1. (Bedenk dat wiskundig gezien punten geen dikte hebben en lijnen ook niet, waardoor het niet zo kan zijn dat de punten zo dicht bij elkaar liggen dat er geen ruimte meer is voor een scheidingslijn. Zo lang de drie punten niet samen op een lijn liggen, is er altijd nog ruimte.)

Voor drie punten zijn we dus klaar: er is één scheidingslijn nodig en dat is ook altijd genoeg. Op naar het volgende geval: twee rode punten en drie blauwe.

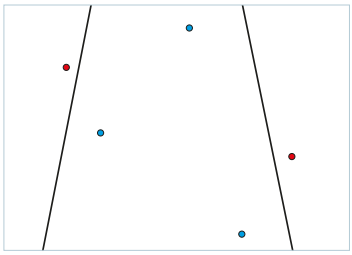
Vraag 1. Bedenk een configuratie van die vijf punten waarvoor één scheidingslijn niet genoeg is. Probeer te beargumenteren waarom het echt niet kan met één scheidingslijn.

We gaan proberen of het met twee scheidingslijnen altijd lukt. In de configuratie van figuur 2 kunnen we de blauwe punten scheiden van de rode met twee lijnen. Maar dit gaat niet altijd goed: in figuur 3 kunnen we niet op die manier de blauwe punten isoleren.

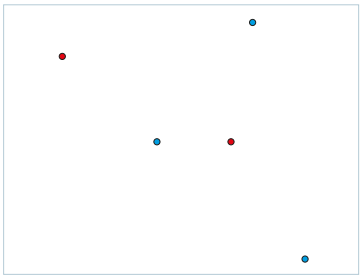
Vraag 2. Puzzel voordat je verder leest zelf even hieraan: lukt het je in figuur 3 om met twee lijnen de blauwe en rode punten in aparte gebieden te zetten?



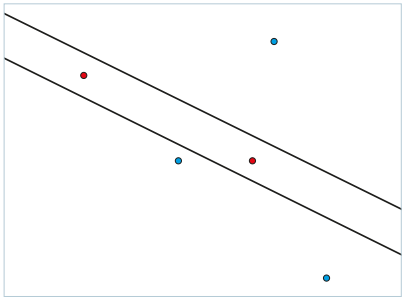
Figuur 1



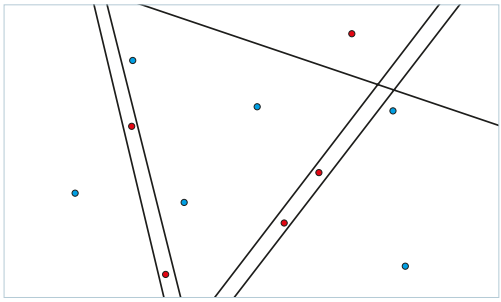
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

Misschien heb je het zelf wel ontdekt: we kunnen de twee rode punten isoleren, zie figuur 4. Dit lukt bij elke configuratie van twee rode en drie blauwe punten, want we kunnen altijd de twee rode punten insluiten met twee scheidingslijnen die heel dicht aan weerszijden van de rode punten liggen; zo dichtbij dat er geen blauwe punten in het gebied terechtkomen.

En zelfs met meer dan vijf punten kan dit principe gaan werken: we kunnen altijd twee punten isoleren met behulp van twee lijnen. Zo kunnen we meteen ook alle configuraties met vier rode en vijf blauwe punten afhandelen met vier scheidingslijnen: we isoleren twee keer twee rode punten met twee keer twee scheidingslijnen. En 2012 rode en 2013 blauwe punten gaat op dezelfde manier met 2012 scheidingslijnen.

PUNTEN AFSNIJDEN Jammer genoeg komt het met 2013 rode en 2014 blauwe punten net niet mooi uit, want we kunnen geen oneven aantal punten insluiten met een oneven aantal scheidingslijnen. Het aantal lijnen wordt steeds even. Toch konden we één rood punt en twee blauwe wel met één lijn scheiden; dat is ook oneven. Dat brengt ons op een nieuw idee: we kunnen ook eerst één rood punt aan de buitenkant *afsnijden*, zodat we een even aantal rode punten overhouden en die weer twee aan twee kunnen isoleren. Zie figuur 5 voor een voorbeeld met vijf rode en zes blauwe punten.

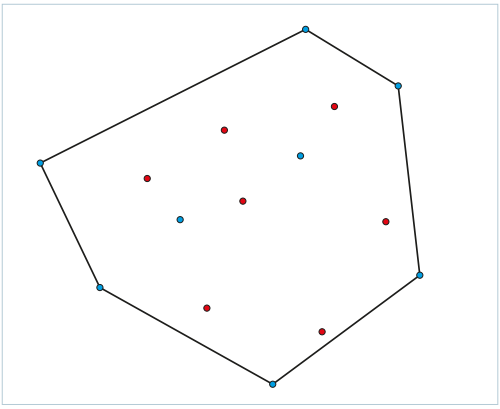
Maar kunnen we wel altijd een rood punt aan de buitenkant afsnijden? In het voorbeeld van figuur 5 konden we zowel het rode punt bovenaan als het rode punt linksonder kiezen om af te snijden, maar de andere rode punten hadden we niet kunnen kiezen, omdat die omringd zijn door blauwe punten. Wat als álle rode punten omringd zijn door blauwe? Dan heb je een situatie zoals in figuur 6: als je

VIJF MEDAILLES VOOR NEDERLAND BIJ IMO 2013 Het Nederlandse team heeft het er op de Internationale Wiskunde Olympiade in Colombia geweldig goed van afgebracht. Jeroen Winkel (16 jaar, 5 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen) wist tot de beste 10% van de wereld door te dringen. Hij en Jeroen Huijben (17 jaar, 6 vwo, Theresia Lyceum Tilburg) ontvingen een zilveren medaille. Bronzen medailles gingen naar Peter Gerlagh (16 jaar, 5 vwo, Theresia Lyceum Tilburg), Michelle Sweering (16 jaar, 5 vwo, Erasmiaans Gymnasium Rotterdam) en Ragnar Groot Koerkamp (18 jaar, 6 vwo, Cambium College Zaltbommel). Tot slot kreeg Djurre Tijsma (18 jaar, 6 vwo, Christelijk Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden) een eervolle vermelding.

Het Belgische team verdiende een zilveren en twee bronzen medailles en twee eervolle vermeldingen.

In totaal deden er 527 deelnemers uit 97 landen mee. Daarvan ontvingen 45 deelnemers een gouden medaille, 92 een zilveren medaille en 141 een bronzen medaille. Het officieuze landenklassement werd aangevoerd door China, Zuid-Korea en de Verenigde Staten. Nederland eindigde op de 25ste plaats – een prestatie van formaat, voor een klein land uit West-Europa – en België op de 44ste plaats.

Wil jij ook kans maken op een plek in het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade? In januari is de eerste ronde op alle middelbare scholen (informeer bij je wiskundedocent) en uit de deelnemers daaraan wordt het team voor IMO 2015 in Thailand geselecteerd.



Figuur 6

lijnstukken tekent die de 'buitenste' blauwe punten verbinden, krijg je een veelhoek zonder deuken, waarbinnen alle rode punten (en de overige blauwe punten) zitten. Zo'n veelhoek heet in de wiskunde het *convexe omhulsel* van de punten. Convex omdat er geen deuken in de veelhoek mogen zitten en omhulsel omdat het alle punten omvat.

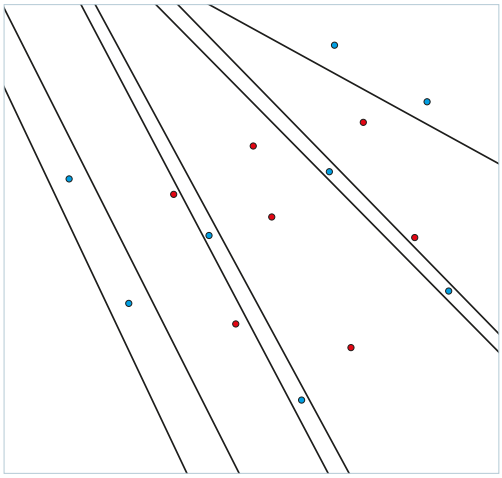
In deze situatie kunnen we dus geen rood punt aan de buitenkant afsnijden. Er zitten wel volop blauwe punten aan de buitenkant, dus daar kunnen we gebruik van maken: we kunnen nu met één lijn twee blauwe punten tegelijk afsnijden. Dat lost het probleem van het oneven aantal rode punten niet op, maar we kunnen nu gewoon verder met de blauwe punten twee aan twee isoleren. In dit voorbeeld kunnen we deze zeven rode en acht blauwe punten scheiden met zeven lijnen, zie figuur 7.

Vraag 3. In figuur 7 hadden we nog een scheidingslijn kunnen besparen door de twee blauwe punten links met één in plaats van twee lijnen af te snijden. We hebben dan twee keer twee blauwe punten van de buitenkant afgesneden met twee keer één lijn. Kan dit altijd bij een configuratie van punten waarbij een blauwe veelhoek alle rode punten insluit, of bestaan er configuraties waarbij dit niet lukt?

We hebben nu een methode gevonden om 2013 rode en 2014 blauwe punten te scheiden met 2013 lijnen:

- als er een rood punt aan de buitenkant zit, snijden we dat punt af met één lijn en isoleren we de overige 2012 rode punten daarna twee aan twee met in totaal 2012 lijnen;
- als er geen rood punt aan de buitenkant zit, snijden we twee blauwe punten aan de buitenkant af met één lijn en isoleren we de overige 2012 blauwe punten daarna twee aan twee met in totaal 2012 lijnen.

Nu blijft alleen de vraag over: kan het ook met minder dan 2013 scheidingslijnen? Voor twee rode en drie blauwe punten had je wellicht zelf al een configuratie gevonden die niet met één lijn kon. En zoiets kunnen we ook voor 2013 rode en 2014 blauwe punten maken. Het is hierbij handig om zoveel mogelijk rode en blauwe punten afwisselend neer te leggen, zodat er zoveel mogelijk scheidingslijnen nodig zijn. Alle punten op een lijn mag niet, maar op een cirkel mag bijvoorbeeld wel. We bekijken dus de configuratie met 2013 rode en 2013 blauwe punten op een cirkel, met steeds rood en blauw afgewisseld. Het laatste blauwe punt leggen we op een willekeurige plek ergens anders neer (wel zodanig dat er geen drie punten op één lijn terechtkomen, maar dat kan natuurlijk gemakkelijk). Nu moeten we steeds een scheidingslijn hebben tussen twee punten die naast elkaar op de cirkel liggen; dat zijn 4026 plekken. Elke scheidingslijn kan maar op twee plekken de cirkel snijden, dus maar twee keer twee naast elkaar gelegen punten van elkaar scheiden. We hebben dus in deze configuratie minstens 2013 scheidingslijnen nodig. Hiermee is het bewijs rond: 2013 scheidingslijnen is het minimale aantal. ■



Figuur 7